

## Module de mathématiques – Classe de seconde – Fiche élève

Dispositif : Groupes de 3 élèves, 2 ordinateurs à disposition par groupe.

Le carré ABCD a un côté de longueur 8 cm.

M est un point du segment [AB].

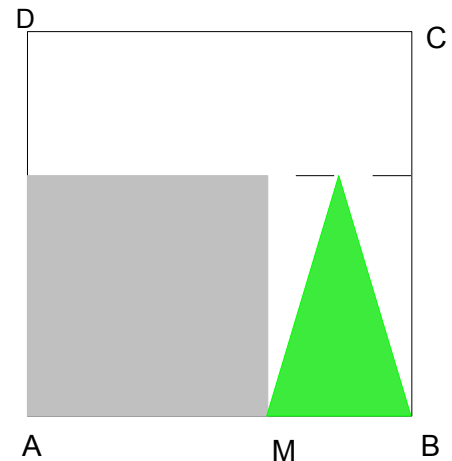
On dessine comme ci-contre dans le carré ABCD

- un carré de côté [AM]
- un triangle isocèle de base [MB] et dont la hauteur a même mesure que le côté [AM] du carré.

On s'intéresse aux aires du carré, du triangle, du motif constitué par le carré et le triangle.

1. On voudrait que le motif ait une aire égale à la moitié de celle du carré ABCD. Quelles dimensions faut-il donner au motif ?

**Lorsque vous avez répondu à cette question, rédigez la réponse en indiquant les différentes pistes exploitées et les outils utilisés, et faites appel au professeur.**



Le carré ABCD a un côté de longueur 8 cm.

M est un point du segment [AB].

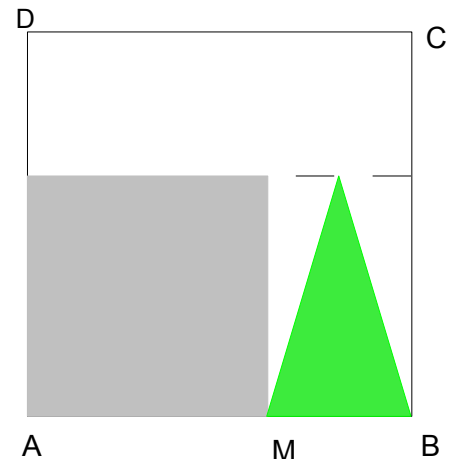
On dessine comme ci-contre dans le carré ABCD

- un carré de côté [AM]
- un triangle isocèle de base [MB] et dont la hauteur a même mesure que le côté [AM] du carré.

On s'intéresse aux aires du carré, du triangle, du motif constitué par le carré et le triangle.

2. On voudrait que le motif ait une aire égale à la moitié de celle du carré ABCD. Quelles dimensions faut-il donner au motif ?

**Lorsque vous avez répondu à cette question, rédigez la réponse en indiquant les différentes pistes exploitées et les outils utilisés, et faites appel au professeur.**



Outils à votre disposition :

- matériel de géométrie ;
- calculatrice graphique ;
- tableur (OpenOfficeCalc ou Excel) ;
- logiciels de géométrie dynamique : Geogebra (sur le bureau de l'ordinateur) ou Tracenpoche utilisable en ligne <http://tracenpoche.sesamath.net/flash/tracenpoche.swf>
- séance Mathenpoche :
  1. [Aide animée : aire du carré et du rectangle](#)
  2. [Aide animée : aire de figures usuelles](#)
  3. [Exprimer en fonction de x](#)
  4. [De l'aide en calcul littéral \(développer, factoriser, résoudre une équation, ...\)](#)
  5. [Calcul formel avec XCAS : logiciel qui permet de faire du calcul littéral](#)
  6. [Fonctions et calculatrices graphiques TI et Casio : de l'aide](#)
  7. [Tracenpoche : Figure à manipuler](#)
  8. [Tracenpoche : Figure à compléter en utilisant les fonctionnalités du logiciel](#)

Les questions suivantes seront distribuées au fur et à mesure de l'avancée des différents groupes.

3. Est-il possible que l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ?
4. Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit la plus grande possible ? Si oui préciser dans quel(s) cas ?
5. Est-il possible de faire en sorte que l'aire du triangle soit plus grande que l'aire du carré ? Si oui préciser dans quels cas c'est possible.
6. Comment évolue l'aire du motif en fonction de AM ? en fonction de MB ?

## Remarques

La façon dont l'aire du triangle évolue en fonction par exemple de AM ne se donne pas a priori. En conséquence l'aire du motif non plus.

- Écrire l'aire du motif sous la forme  $0,5x^2 + 4x$  (si on désigne par  $x$  la longueur AM exprimée en cm) peut permettre à certains élèves de donner le sens de variation de la fonction sur l'intervalle utile.
- Un élève pourrait se montrer étonné de constater que dans la classe certains trouvent que l'aire du motif est une fonction croissante (si l'on choisit AM comme variable), alors que d'autres obtiennent une fonction décroissante (ceux qui ont choisi BM comme variable). Cela pourrait être de nature à faire sentir l'importance de la variable. On attend d'un élève qu'il puisse :
- s'approprier le problème en faisant des essais de manière à comprendre que plusieurs quantités varient : le côté du petit carré, la base du triangle, la hauteur du triangle, l'aire du motif. Pour certains élèves un premier obstacle à surmonter est d'identifier que le côté du petit carré et la base du triangle sont liés, (resp.  $x$  et  $8-x$ ). Quand ils font des essais ils sont assez nombreux à choisir AM et BM indépendamment.
- identifier la variable  $x$  (longueur du côté du carré ou longueur du côté du triangle)
- éventuellement prendre l'initiative de récolter des données expérimentales soit en calculant numériquement l'aire du motif pour quelques valeurs de  $x$  (à la main ou avec un tableur), soit en utilisant un logiciel de géométrie.
- constater que ces essais ne lui permettent pas de répondre de façon exacte à la question posée mais qu'en revanche ils peuvent permettre d'y répondre de façon approchée à condition que les essais soient affinés. Ce faisant avoir eu la possibilité d'identifier la nécessité du passage au modèle mathématique pour répondre de façon exacte au problème posé (existence de solution ou pas ? unicité ou pas ? valeur exacte des solutions).
- Associer de façon autonome au problème une expression, celle de l'aire du motif en fonction de :

$$\frac{1}{2}x^2 + 4x \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}x(8-x) + (8-x)^2$$

suivant le choix fait pour la variable .

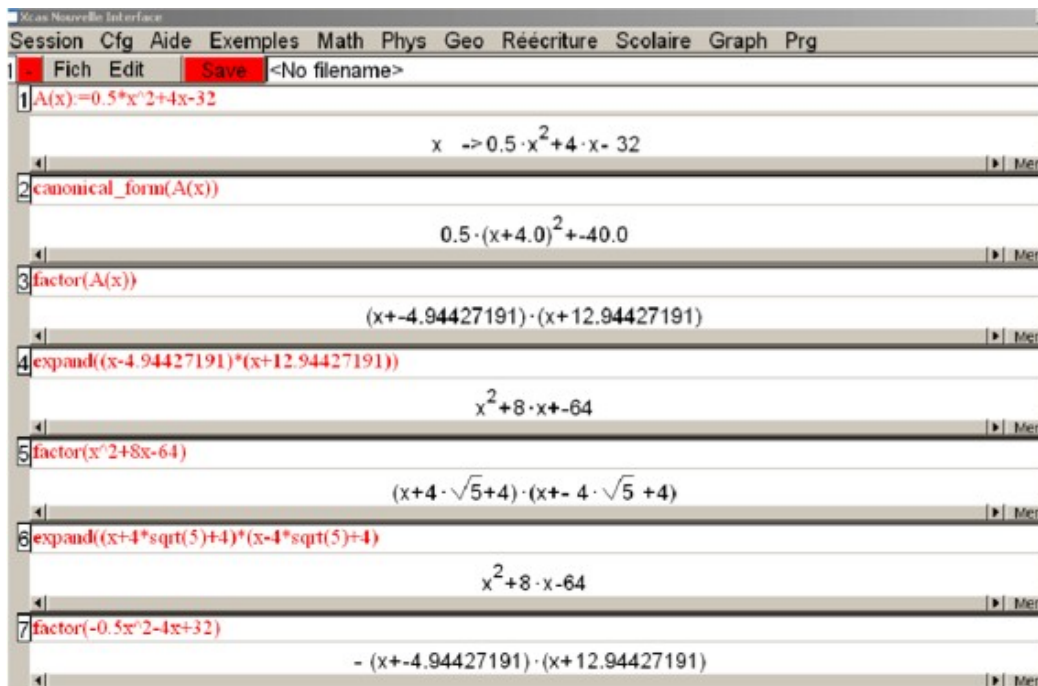
- Conduire une résolution graphique ou algébrique et dans ce cadre : associer à la formule une courbe tracée à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel et faire une lecture graphique trouver de façon autonome la forme de l'expression adaptée au problème et, si besoin est, (autrement dit si la maîtrise technique du calcul algébrique n'est pas encore suffisante), l'obtenir en ayant recours au calcul formel avoir eu une occasion de comprendre (et/ou de montrer qu'il a compris) que la résolution de l'équation donne toutes les solutions ainsi que leur valeur exacte alors que la résolution graphique ne donne qu'une valeur approchée des solutions et une démonstration est nécessaire pour être sûr de les avoir toutes.

## Annexe 1. Des exemples de raisonnement à valoriser (document ressource)

**Exemple 1 :** On se place dans le cas où l'étude d'un problème conduit à la résolution de l'équation

$$\frac{1}{2}x^2 + 4x - 32 = 0.$$

- J'ai besoin de factoriser l'expression pour résoudre cette équation ; je fais appel au logiciel de calcul formel :



Ce travail sur les expressions algébriques peut être l'occasion de différencier les exigences au niveau du degré de maîtrise technique des élèves : on peut, en effet, s'autoriser à ne demander qu'à certains élèves de déterminer la factorisation, la forme canonique étant donnée (ou non).

• Je résous l'équation en reconnaissant la forme factorisée comme étant celle la mieux adaptée à mon problème : j'ai donc démontré qu'il n'y a qu'une solution au problème et que sa valeur exacte est  $\varepsilon\sqrt{5}-4$ .

**Exemple 2 :** On se place dans le cas où l'étude d'un problème conduit à la résolution de l'équation

$$\frac{1}{2}x(x+8)-32=0.$$

• Avec ma calculatrice, je trace la courbe représentative de la fonction  $x \rightarrow 0.5x(x+8)-32$ .

• Je conjecture qu'il y a existence et unicité de la solution sur l'intervalle  $[0; 8]$  car la fonction semble croissante sur cet intervalle.

• Je sais que sur ma calculatrice je n'observe qu'un dessin « faussé » de la courbe représentative de la fonction et que cela ne suffit donc pas à démontrer les propriétés de cette fonction. Je dois donc démontrer que la fonction est croissante sur  $[0; 8]$  :

- $f$  est une fonction polynôme du second degré, je sais d'après les résultats vus en cours qu'elle est croissante puis décroissante ou le contraire.
- Je constate que  $f(0) = f(8) = 32$  ; J'ai deux points de la parabole qui ont même ordonnée. J'en déduis l'axe de symétrie. Les variations changent en  $4$ .
- $0$  et  $2$  sont tous les deux plus grands que  $4$ . Or  $f(0) = 32$  et  $f(2) = 22$  ainsi  $f(0) < f(2)$ .  $f$  n'est donc pas décroissante mais bien croissante à partir de  $4$ . Donc la fonction est bien croissante sur  $[0; 8]$ .

J'ai démontré qu'il n'y avait qu'une seule solution au problème posé et je peux maintenant en chercher une valeur approchée.

**Exemple 3 :** On se place dans le cas où l'étude d'un problème conduit à rechercher si la quantité  $\frac{1}{x^2}+4x$  peut être rendue la plus grande possible (la plus petite possible) quand  $x$  appartient à l'intervalle  $[0; 8]$ . (techniquement plus exigeant et seulement à la portée de quelques élèves)

• Des essais me permettent de conjecturer que la quantité devient de plus en plus grande ; sa plus petite valeur est  $0$  (pour  $x = 0$ ) et sa plus grande valeur est  $64$  ( pour  $x = 8$ ). Autrement dit la fonction  $x \rightarrow 0,5x^2+4x$  est croissante sur  $[0; 8]$

• Je dois le démontrer :

- Je prends deux réels  $a$  et  $b$  quelconques dans  $[0; 8]$  avec  $b$  plus petit que  $a$ . Je veux démontrer que  $f(b)$  est plus petit que  $f(a)$  soit  $0,5b^2+4b < 0,5a^2+4a$

Or  $b < a$  donc  $b^2 < a^2$  car la fonction carrée est croissante sur  $[0; 8]$ , donc  $0,5b^2 < 0,5a^2$ , donc  $0,5b^2+4b < 0,5a^2+4b < 0,5a^2+4a$  car  $b < a$  donc  $4b < 4a$  donc soit  $f(b) < f(a)$ .

Conclusion : Pour tout  $b$  plus petit que  $a$ ,  $f(b)$  est plus petit que  $f(a)$ .

• J'ai donc bien démontré que la fonction est croissante sur  $[0; 8]$ .

## Réponse aux questions

1. Si on pose  $AM = x$ . L'aire du motif est égale à  $x^2 + \frac{(8-x)x}{2} = 4x + \frac{x^2}{2}$ . Le motif a une aire égale à la moitié de celle du carré ABCD lorsque  $4x + \frac{x^2}{2} = \frac{64}{2}$ . Réduite et ordonnée, cette équation devient  $x^2 + 8x - 64 = 0$ , on cherche donc les solutions de  $x^2 + 8x - 64 = 0$  sur  $[0 ; 8]$ . On ne sait pas (encore) résoudre une telle équation, mais l'on peut obtenir une approximation de la solution en utilisant la calculatrice graphique, un tableur ou un logiciel de géométrie dynamique:  $x \approx 4,9$ .
2. On cherche à résoudre  $x^2 = 4x - \frac{x^2}{2}$ , ou encore  $\frac{3}{2}x^2 - 4x = 0$ , ou encore  $3x^2 - 8x = 0$ , ou finalement  $x(3x - 8) = 0$ , équation-produit nulle qui a deux solutions:  $x = 0$  ou  $x = \frac{8}{3}$ .
3. L'aire du triangle c'est  $4x - \frac{x^2}{2}$ , la représentation graphique de  $x \rightarrow 4x - \frac{x^2}{2}$ , montre qu'il y a un maximum aux alentours de  $x = 4$ . La lecture du tableau de valeurs de cette fonction nous donne la même impression.
4. La représentation graphique de  $x \rightarrow 4x - \frac{x^2}{2}$  et de  $x \rightarrow x^2$ , montre que pour  $x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]$  l'aire du triangle est supérieure à celle du carré.
5. L'aire du motif en fonction de AM est celle que l'on a étudiée en 1., son graphe nous montre qu'elle est croissante sur  $[0 ; 8]$ .

Si  $MB = x$ , l'aire du carré est égale à  $(8-x)^2$  et celle du triangle à  $\frac{x(8-x)}{2}$ , donc celle du motif

$64 - 16x + x^2 + 4x - \frac{x^2}{2} = 64 - 12x + \frac{x^2}{2}$ . À la calculatrice ou à l'aide d'un tableur on peut établir un tableau de valeurs qui nous laisse à penser que cette fonction est décroissante. Ou encore, à la calculatrice ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, la représentation graphique de cette fonction nous laisse à penser que cette fonction est décroissante.