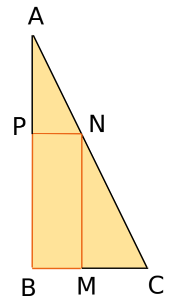
Activité : Des variations



Dans le triangle ABC rectangle en B ci-contre : AB = 10 cm et BC = 5 cm. M est un point mobile du segment [BC]. P et N sont les points des segments [AB] et [AC] tels que BMNP soit un rectangle.

a. On s'intéresse à l'aire de BMNP, que peux-tu en dire ?

b. Quelle valeur maximale peut prendre l'aire de BMNP ?

Lorsque vous avez répondu à cette question, rédigez la réponse en indiquant les différentes pistes exploitées et les outils utilisés, et faites appel au professeur.

c. Est-il possible de faire en sorte que l'aire de BMNP soit égale à celle de MNC ?

d. Est-il possible de faire en sorte que l'aire de BMNP soit égale à celle de APN ?

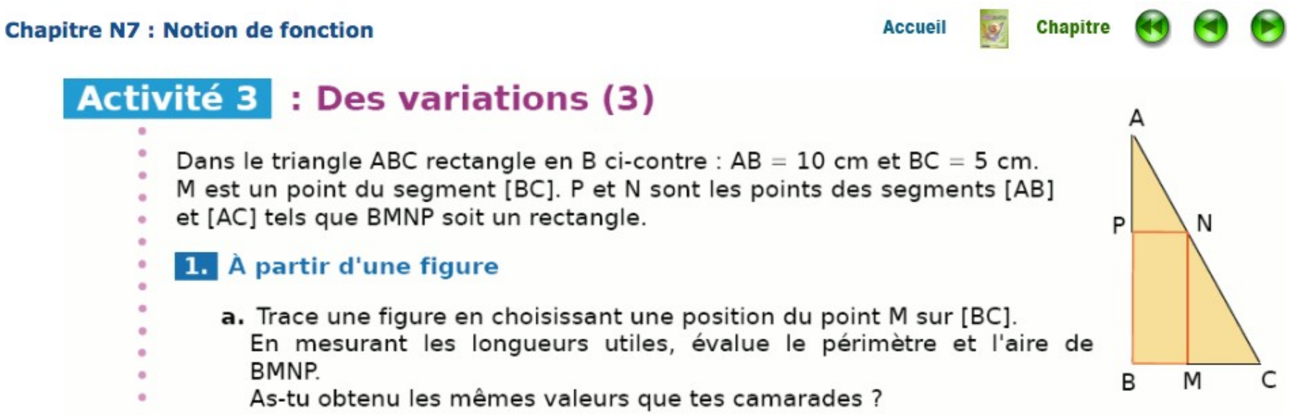
Outils à votre disposition :

- le contenu du classeur de mathématiques ;
- le matériel de géométrie ;
- la calculatrice graphique ;
- un tableur (OpenOfficeCalc ou Excel) ;
- un logiciel de géométrie dynamique : Geogebra (sur le bureau de l'ordinateur) ou Tracenpoche utilisable en ligne http://tracenpoche.sesamath.net/flash/tracenpoche.swf
- une séance Mathenpoche :
  1. Aide animée : aire du carré et du rectangle
  2. Aide animée : Aire du triangle rectangle
  3. Exprimer en fonction de *x*
  4. De l'aide en calcul littéral (développer, factoriser, résoudre une équation, ...)
  5. Calcul formel avec XCAS : logiciel qui permet de faire du calcul littéral
  6. Fonctions et calculatrices graphiques TI et Casio : de l'aide
  7. Tracenpoche : Variations : figure à manipuler
  8. Tracenpoche : Variations : figure à compléter

Cet énoncé porte sur la résolution de problèmes se ramenant à une équation du type $f(x)=k$ dans le cas où toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction (cf. le document Ressources pour la classe de seconde - Fonctions)

Les ressources à disposition des élèves

Le problème posé aux élèves est tiré de l'activité 3 du chapitre Généralités sur les fonctions du manuel Sésamath 3ème :


Chapitre N7 : Notion de fonction

Accueil Chapitre

Activité 3 : Des variations (3)

Dans le triangle ABC rectangle en B ci-contre : AB = 10 cm et BC = 5 cm. M est un point du segment [BC]. P et N sont les points des segments [AB] et [AC] tels que BMNP soit un rectangle.

1. À partir d'une figure

a. Trace une figure en choisissant une position du point M sur [BC]. En mesurant les longueurs utiles, évalue le périmètre et l'aire de BMNP.
As-tu obtenu les mêmes valeurs que tes camarades ?

Les élèves ont déjà été initiés à l'utilisation de la calculatrice graphique pour représenter des fonctions, afficher un tableau de valeurs et utiliser la fonctionnalité TRACE. Ils se sont déjà connectés à l'application Mathenpoche pour travailler sur une séance d'exercices[1]. Pour l'instant, ils n'ont pas utilisé de logiciel de géométrie dynamique, de tableur ou de logiciel de calcul formel dans le cours de mathématiques en seconde, mais la majorité d'entre eux ont utilisé au collège un logiciel de géométrie dynamique et un tableur. Enfin, le théorème de Thalès a été revu à l'occasion de l'évaluation diagnostique de rentrée en géométrie, et traitée en Aide individualisée pour ceux qui n'étaient pas du tout au point.
Plutôt que de laisser patauger les élèves, et pour fixer les esprits, j'ai accompagné l'énoncé de la liste des outils mis à leur disposition.

Au sujet de cette séance Mathenpoche :

Les deux premiers liens

1. Aide animée : aire du carré et du rectangle
2. Aide animée : Aire du triangle rectangle

ouvrent sur des aides animées de l'application Mathenpoche dans lesquelles une animation rappelle le calcul de l'aire d'un rectangle, d'un carré et du triangle rectangle. Ces aides sont là pour qu'aucun élève n'hésite à rentrer dans la recherche du problème.

Le troisième lien

3. Exprimer en fonction de x

---

1 Séance "généralités sur les fonctions" :

1. Points de la courbe représentative
2. Tableau de valeurs
3. Tableau de valeurs (bis)
4. Lecture d'images
5. Retrouver connaissant l'image
6. Lecture d'antécédents
7. Lecture d'image et d'antécédent
8. Détermination d'images

est un exercice de l'application Mathenpoche dans lequel *"L'élève doit déterminer des expressions de longueurs, d'aires ou de périmètres en fonction de x dans des cas élémentaires."*. Cet exercice doit pouvoir aider l'élève qui a du mal à identifier la variable et à s'en servir.

Le quatrième lien

4. De l'aide en calcul littéral (développer, factoriser, résoudre une équation, ...)

invite l'élève à se rendre sur le site Kidimath, sélectionner le niveau 3ème et le chapitre N2 : Calcul littéral et équations. Il pourra éventuellement y revenir pour y chercher autre chose, vu qu'il a accès à travers ce lien à un accompagnement à la scolarité en mathématiques pour tout le collège.

Le cinquième lien

5. Calcul formel avec XCAS : logiciel qui permet de faire du calcul littéral

pointe vers le logiciel de calcul formel en ligne XCAS, avec quatre exemples pour illustrer les fonctions `factoriser`, `developper`, `resoudre`, et `simplifier`. Une remarque signale aux élèves que XCAS comprend également un tableur, lequel peut calculer avec les expressions saisies en mode "console".

Le sixième lien

6. Fonctions et calculatrices graphiques TI et Casio : de l'aide

propose des fiches de méthode sur le traçage de courbes de fonctions sur diverses calculatrices, en principe toutes celles présentes en classe.

Les septième et huitième liens

7. Tracenpoche : Variations : figure à manipuler
8. Tracenpoche : Variations : figure à compléter

proposent la figure de géométrie dynamique illustrant le problème à manipuler tout d'abord (seul le point M est mobile), puis éventuellement à compléter, dans ce cas la figure est accompagnée de la consigne :

Il peut être utile de consulter les aides suivantes sur le site Tracenpoche :
- les boutons de la zone figure ;
- la section analyse.

ce qui devrait suffire à l'élève pour faire ce qu'il faut pour conjecturer des réponses.

Compte-rendu de la première séance en classe

La séance a été proposée en classe de seconde sur l'heure de module (2 groupes de 16 élèves), en salle informatique. Les 16 élèves de chaque groupe se sont répartis en 4 groupes de 3 et deux groupes de 2. Chaque groupe disposait de deux ordinateurs.

Un seul groupe ne s'est pas immédiatement emparé de l'ordinateur, il a commencé à travailler sur papier, avant d'utiliser la séance Mathenpoche. Deux groupes ont commencé par ouvrir Tracenpoche pour essayer de construire la figure du problème. Les autres groupes ont ouvert la séance Mathenpoche. Le temps passé devant les ordinateurs par les différents groupes a été compris entre 5 et 25 minutes.

Utilisation des ressources :

- 100% des groupes ont utilisé l'aide animée : aire du carré et du rectangle
- 83% des groupes ont utilisé l' Aide animée : Aire du triangle rectangle
- 8% des groupes ont utilisé Exprimer en fonction de x, en fait un seul groupe a utilisé une variable pour mathématiser le problème.

- 56% des groupes ont utilisé De l'aide en calcul littéral (développer, factoriser, résoudre une équation, ...)
- 28% des groupes ont utilisé le calcul formel avec XCAS : logiciel qui permet de faire du calcul littéral, la plupart par simple curiosité puisqu'ils n'avaient toujours pas d'expression algébrique à manipuler.
- 33% des groupes ont utilisé Fonctions et calculatrices graphiques TI et Casio : de l'aide, la plupart par simple curiosité puisqu'ils n'avaient toujours pas d'expression algébrique à manipuler.
- 100% des groupes ont utilisé la figure à manipuler
- 72% des groupes ont utilisé la figure à compléter en utilisant les fonctionnalités de Tracenpoche.
- 25% des groupes ont utilisé la calculatrice.
- 100% des groupes ont utilisé un brouillon.
- 50% des groupes ont réalisé des constructions (souvent plusieurs) illustrant le problème.

Tous les groupes ont réussi à conjecturer la réponse à la première question, une seconde séance va leur permettre de mathématiser le problème et de prouver leur résultat (un seul groupe a utilisé une variable).

Relance de l'activité

Projection de la figure animée : Variations : figure à manipuler

On perçoit que l'aire varie en **fonction** de la position de M. Elle atteint une valeur minimale, nulle, lorsque M est en B ou en C, entre cette aire n'est pas nulle et semble croitre puis décroitre.
Si l'aire varie en fonction de la position de M, on peut logiquement chercher à exprimer une fonction qui donne la valeur de l'aire pour une position de M donnée.
On a le choix pour la variable, la première qui vient à l'esprit des élèves est $BM=x$, vient ensuite $PN=x$, je leur fais remarquer que celle-ce est en fait proposée en fonction de la première justement ! Puis, viens $CM=x$. Je leur dis qu'ils peuvent choisir celle qu'ils veulent, et qu'ensuite il leur faudrait choisir un nom pour une fonction qui devrait exprimer l'aire de l'enseigne en fonction de *x*.
$f(x)=\ldots$
On rappelle son domaine de définition, énoncé par un élève lors de la discussion précédente : $D_f=[0;5]$.
Étudier les variations de *f* nous permettrait de répondre au problème, nous avons déjà fait cela en classe, et donc conjecturer que le maximum de $f(x)\approx 12{,}5\,cm^2$ est atteint en $x=2{,}5$.
Il restera à prouver que cela est vrai, c'est-à-dire que $f(x)<12{,}5$ pour tout $x\neq 2{,}5$.
Document écrit :

- pistes empruntées
- outils utilisés

La séance :
Sans aucune influence de ma part, ils choisissent tous $x=BM$.
Problème avec $aire=x\times 10-2x$ ou $aire=10-2x\times x$
Problème avec $aire=x\times y$
Problème développement $x(10-2x)=10x-2x=8x$ ou $x(10-2x)=10-2x^2$
Certains groupes ont du mal à trouver l'expression de la fonction, ils s'en sortent en faisant l'exercice « Exprimer en fonction de *x* » soit de leur propre initiative soit à la suite de mon conseil.
A la calculatrice, les élèves conjecturent que la fonction croit entre 0 et 2,5 et décroit entre 2,5 et 5, elle atteint donc un minimum, 12,5 pour $x=2{,}5$.

Utilisation des ressources :

- 58% des groupes ont utilisé l'aide animée : aire du carré et du rectangle
- 42% des groupes ont utilisé l' Aide animée : Aire du triangle rectangle
- 33% des groupes ont utilisé Exprimer en fonction de *x*, en fait un seul groupe a utilisé une variable pour mathématiser le problème.
- 17% des groupes ont utilisé De l'aide en calcul littéral (développer, factoriser, résoudre une équation, ...)
- 50% des groupes ont utilisé le calcul formel avec XCAS : logiciel qui permet de faire du calcul littéral, la plupart par simple curiosité puisqu'ils n'avaient toujours pas d'expression algébrique à manipuler.
- 8% des groupes ont utilisé Fonctions et calculatrices graphiques TI et Casio : de l'aide, la plupart par simple curiosité puisqu'ils n'avaient toujours pas d'expression algébrique à manipuler.
- 58% des groupes ont utilisé la figure à manipuler
- 42% des groupes ont utilisé la figure à compléter en utilisant les fonctionnalités de Tracenpoche.
- 100% des groupes ont utilisé la calculatrice.
- 100% des groupes ont utilisé un brouillon.
- 58% des groupes ont réalisé des constructions (souvent plusieurs) illustrant le problème.

On constate que l'utilisation des ressources Exprimer en fonction de *x*, calcul formel avec XCAS, et la calculatrice a progressé, les autres ressources ont été moins utilisées.

Retour en classe lors de la restitution des copies

Aucun élève n'a apporté la preuve que $f(2{,}5)=12{,}5$ est bien le maximum de $f(x)$ sur [0 ; 5].
Ils n'en ont pas ressenti la nécessité, pour eux cela se voyait ...
Je leur demande alors de prouver que $f(x)<12{,}5$ si $x\neq 2{,}5$, c'est-à-dire $12{,}5-f(x)>0$ si $x\neq 2{,}5$, soit $2x^2-10x+12{,}5>0$ si $x\neq 2{,}5$, ou encore $4x^2-20x+25>0$ si $x\neq 2{,}5$, finalement $(2x-5)^2>0$ si $x\neq 2{,}5$, ce qui est vrai bien sur.

Et si c'était à refaire ?

Je changerais l'énoncé initial en :
« AB = 10 cm et BC = 4 cm. »
Ce qui évite d'avoir une longueur égale à la moitié de l'autre (qui peut amener l'élève à penser que c'est au milieu que se trouve la solution), et surtout afin d'avoir une preuve un petit peu plus accessible :
$f(2)=10$ est bien le maximum de $f(x)$ sur [0 ; 4].
$f(x)<١٠$ si $x\neq 2$, c'est-à-dire $10-f(x)>0$ si $x\neq 2$, soit $2{,}5x^2-10x+10>0$ si $x\neq ٢$, ou encore $x^2-4x+4>0$ si $x\neq 2$, finalement $(x-2)^2>0$ si $x\neq 2$, ce qui est vrai bien sur.
Pour le reste, même chose !